Probabilités : Exercices

M1 Mathématiques Fondamentales, Université Paris-Saclay, 2017–2018

Espaces de probabilité, variables aléatoires

Exercice 1. Pour chaque exemple ci-dessous, donner un espace des possibles Ω fini (en précisant son cardinal) et (si possible) une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ qui décrivent l'expérience ou l'objet aléatoire. Attention, parfois plusieurs réponses sont possibles qui peuvent ne pas être équivalentes.

1. Lancer d'un dé de 20 faces non pipé.
2. Le résultat de n lancers pile ou face d'une pièce non truquée.
3. Une partie aléatoire d'un ensemble S à n éléments.
4. Le résultat d'un match de foot.
5. Le résultat d'un sondage téléphonique auprès de 1047 personnes à qui ont a demandé une semaine avant le second tour de l'élection présidentielle 2012 pour qui ils allaient voter.

Exercice 2. Lesquelles des classes d'ensembles suivantes sont des tribus ? Preuve ou contre-exemple.

1. La classe des ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$.
2. Dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, la classe des ensembles de forme $A \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ou $A \subset \{0,1\}^k$ pour un k fixé.
3. Dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, la classe des ensembles de forme $A \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ou $A \subset \{0,1\}^k$ pour un k qui peut dépendre de A.
4. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\{0,1\}^n \times A : A \in \mathcal{B}\}$, avec $\mathcal{B}$ une tribu quelconque sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
5. La classe des parties de $\mathbb{N}$ qui admettent une densité. On dit qu'une partie A de $\mathbb{N}$ admet une densité si $\mathrm{Card}(A \cap \{0,\dots,n\})/n$ admet une limite quand $n \to \infty$.

Exercice 3.

1. Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que l'application $\mu_A = \mu(\cdot \cap A)$ sur $\mathcal{A}$, appelée la *restriction* de la mesure μ sur A, est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $A \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}(A) > 0$. Montrer que l'application
$$B \in \mathcal{A} \quad \mapsto \quad \mathbb{P}(B \,|\, A) := \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$
est encore une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée la *probabilité* $\mathbb{P}$ *conditionnelle à (l'événement) A.*

Exercice 4. Vous êtes invités chez un couple d'amis qui ont deux enfants. En allant chez eux, vous vous sentez un peu mal à l'aise car vous ne vous souvenez plus des noms des enfants, même pas de leurs sexes. Heureusement, vous apercevez devant la porte d'entrée une paire de chaussures de filles, donc vous en déduisez qu'ils ont au moins une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille/un garçon ? Attention, plusieurs réponses possibles selon la formalisation de l'expérience.

Exercice 5. Soient X, Y deux v.a. iid de loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la loi de $X + Y$. En déduire celle de $X - Y$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$ de deux façons.

Exercice 6 (Perte de mémoire)**.** Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Déterminer toutes les lois possibles de X telles que
$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(X \geq n + m \,|\, X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq m).$$

Exercice 7 (Perte de mémoire 2)**.** Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer toutes les lois possibles de X telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{P}(X \geq x + y \,|\, X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq y).$$

Indication : attention, c'est un exercice un peu technique.

Exercice 8. Soit $X \geq 0$ une v.a. et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante et dérivable avec $f(0) = 0$. Montrer l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^\infty f'(x)\mathbb{P}(X \geq x)\, dx$$

Exercice 9 (Formule du crible)**.** Le but de cet exercice et de montrer comment l'utilisation des indicatrices peut faciliter le calcul de probabilités d'événements. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Montrer que

$$\mathbf{1}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{1}_{A_i}).$$

2. Utiliser la formule précédente pour démontrer la *formule du crible* : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{l=1}^n (-1)^{l-1} \sum_{I \in \mathcal{P}_{l,n}} \mathbb{P}(A_I),$$

   où on note pour tout $l, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_{l,n} = \{I \subset \{1, \ldots, n\} : \mathrm{Card}(I) = l\}$ et pour tout $I \subset \{1, \ldots, n\}$, $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$.

Exercice 10. Pascal et Fermat jouent au lancer de pièce dans un café parisien. Chacun a misé 50 francs ; le premier qui arrive a 10 points gagne tout. Au score de 8 à 7 pour Fermat, celui-ci reçoit un message qui l'oblige à retourner à Toulouse sur-le-champ. Plus tard, le problème se pose comment répartir les 100 francs. Pascal propose alors que puisque Fermat a gagné 8 lancers sur 15, il devrait recevoir 8/15 du montant et Pascal les 7/15 restants. Fermat n'est pas d'accord : il propose que chacun reçoit le montant proportionnel à sa probabilité de gagner le jeu. Comparez les deux propositions. Laquelle trouvez-vous plus juste ?

Exercice 11. Soient X et Y deux v.a. iid de loi uniforme sur $[0, 1]$. Donner la loi de $X + Y$ et $X - Y$.

Exercice 12 (Loi gamma)**.** La *loi gamma*, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$ avec[1] $\alpha, \beta > 0$ est la loi sur $[0, \infty)$ de densité

$$f_{\alpha,\beta}(x) = c_{\alpha,\beta} x^{\alpha-1} e^{-\beta x},$$

pour une constante de normalisation $c_{\alpha,\beta}$. Cette loi joue un rôle très important en probabilité.

1. Calculer la valeur de la constante $c_{\alpha,\beta}$ en fonction de la fonction Γ d'Euler, définie pour $\Re\alpha > 0$ par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

2. Identifier la loi exponentielle de paramètre λ comme une loi Gamma avec des paramètres qu'on précisera.
3. Si $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, montrer que N^2 suit une loi Gamma avec des paramètres qu'on précisera.
4. Soit $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Quelle est la loi de bG pour $b > 0$?
5. Soient G_1, G_2 des v.a. indépendantes avec $G_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, 2$. Quelle est la loi de $G_1 + G_2$?
6. Soient $G_1, \ldots, G_n$ des v.a. indépendantes avec $G_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, \ldots, n$. Quelle est la loi de $\sum_{i=1}^n G_i$?
7. Soit $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Calculer les moments entiers $\mathbb{E}[G^n]$, $n \in \mathbb{N}$. En déduire les moments entiers $\mathbb{E}[N^n]$ d'une variable gaussienne standard N.
8. *optionnel :* Soit $G \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Montrer que la fonction caractéristique de G vaut

$$\varphi_G(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda G}] = \left(\frac{\beta}{\beta - i\lambda}\right)^\alpha.$$

   Indication : montrer que φ_G satisfait à une équation différentielle.

   En déduire les résultats obtenus dans les parties 4, 6 et 7 de cet exercice.

1. Attention ! D'autres conventions pour le choix des paramètres existent, surtout pour le deuxième.

Exercice 13 (Méthode de premier et second moment)**.** Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Nous nous intéressons à la probabilité de l'événement $\{X \neq 0\}$. Nous allons voir qu'on peut obtenir des bornes sur cette probabilité à partir des deux premiers moments de la v.a. X.

1. A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que $\mathbb{P}(X \neq 0) \leq \mathbb{E}X$.
2. A l'aide de l'inégalité de Chebychev, montrer que $\mathbb{P}(X \neq 0) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\mathbb{E}X)^2}$.
3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz, montrer que $\mathbb{P}(X \neq 0) \geq \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}[X^2]}$.
4. Montrer que la borne inférieure obtenue dans 3. est toujours aussi bonne ou meilleure que celle obtenue dans 2.

Nous résumons les résultats ci-dessus : Pour une v.a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{(\mathbb{E}X)^2} \leq \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}[X^2]} \leq \mathbb{P}(X \neq 0) \leq \mathbb{E}X.$$

Exercice 14 (Méthode de premier et second moment : application)**.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ les résultats de n lancers pile ou face, avec pile $= 1$ et face $= 0$. Autrement dit, soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. iid de loi $\mathrm{Ber}(1/2)$, ou encore, soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire uniforme dans $\{0, 1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, soit $A_{k,n}$ l'événement que la suite $X_1, \ldots, X_n$ contient k uns consécutifs. Dans cet exercice, on souhaite estimer la probabilité $\mathbb{P}(A_{k,n})$ en fonction de k et n. Pour simplifier la notation qui suit, on pose $X_0 = 0$. On définit alors la v.a.

$$\begin{aligned} I_{k,n} &= \#\{i \in \{0, \ldots, n-k\} : X_i = 0,\ X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\} \\ &= \sum_{i=0}^{n-k} \mathbf{1}_{B_i}, \end{aligned}$$

où on définit pour tout $i = 0, \ldots, n-k$ l'événement

$$B_i = \{X_i = 0,\ X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\}.$$

1. Justifier l'égalité des événements
$$A_{k,n} = \{I_{k,n} \geq 1\}.$$
2. Calculer $\mathbb{E}[I_{k,n}]$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[I_{k,n}^2] \leq \mathbb{E}[I_{k,n}] + \mathbb{E}[I_{k,n}]^2$.
4. A l'aide de l'Exercice 13, déduire des résultats précédents les bornes suivantes :
$$\frac{(n-k+2)2^{-k-1}}{1 + (n-k+2)2^{-k-1}} \leq \mathbb{P}(A_{k,n}) \leq (n-k+2)2^{-k-1}.$$
5. Application numérique : Dresser une table des bornes inférieures et supérieures des valeurs de $\mathbb{P}(A_{k,n})$ pour $n = 100$ et $k = 1, 2, \ldots, 10$.

Exercice 15 (Borne de Chernoff)**.**

1. Soit X une v.a. réelle. On définit les fonctions $\varphi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}] \in (0, \infty]$ et $I(x) = \sup_{\lambda \geq 0}[\lambda x - \varphi(\lambda)]$. Montrer la *borne de Chernoff* :
$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-I(x)}.$$
2. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de v.a. iid. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq an) \leq e^{-nI(a)}.$$

Indépendance de tribus, fonctions génératrices, sommes aléatoires, vecteurs gaussiens

Exercice 16. On définit deux tribus sur $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \sigma(\{x > 0\}, \{x = 0\}, \{x < 0\}) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \sigma(\{|x| \in B\};\ B \subset \mathbb{R}_+ \text{ mesurable}).$$

Caractériser toutes les mesures de probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathbb{R}$ telles que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes.

Exercice 17. Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note $g_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$ sa fonction génératice.

1. Montrer que $g_X(z)$ est une série de rayon de convergence au moins 1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{d^n}{dz^n} g_X(z)\Big|_{z\uparrow 1} = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)].$$
On appelle ces quantités les *moments factoriels* de X.
3. Calculer les fonctions génératices des lois Poisson, binomiale et géométrique. *optionnel :* En déduire les moments factoriels de ces lois ainsi que l'espérance et la variance.

Exercice 18. Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $X_1, X_2, \dots$ une suite iid de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, indépendantes de N. Soit g_N la fonction génératrice de N et φ_X la fonction caractéristique de X_1. Calculer la fonction caractéristique de $\sum_{n=1}^N X_n$.

Exercice 19. Appliquer l'exercice précédent au cas où N est une variable de loi géométrique et X_1 est une variable de loi exponentielle ou géométrique. Pourquoi les deux résultats se ressemblent-ils ?

Exercice 20 (Loi multinomiale)**.** Soit $\vec{X} = (X_1, \dots, X_k)$ un vecteur aléatoire de loi multinomiale de paramètres n et $p_1, \dots, p_k$.

1. Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{\vec{X}}(\vec{t})$ de $\vec{X}$. Utilisez le fait qu'on peut écrire
$$\vec{X} = \sum_{j=1}^n (\mathbf{1}_{(Y^j=1)}, \dots, \mathbf{1}_{(Y^j=k)}),$$
avec $Y^1, \dots, Y^n$ iid de loi $\mathbb{P}(Y^j = i) = p_i$.
2. Si $Y^1, Y^2, \dots$ sont iid de même loi que ci-dessus et P est une v.a. indépendante de $(Y^1, Y^2, \dots)$ de loi $\mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, montrer que le vecteur aléatoire
$$\vec{S} := (S_1, \dots, S_k) := \sum_{j=1}^P (\mathbf{1}_{(Y^j=1)}, \dots, \mathbf{1}_{(Y^j=k)})$$
suit la loi $\mathrm{Po}(\lambda p_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Po}(\lambda p_k)$.

Exercice 21. Soient $X = (X_1, \dots, X_n)^T, Y = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ deux vecteurs aléatoires dans L^2. On note
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])^T] = (\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(Y_j - \mathbb{E}[Y_j])])_{i\in\{1,\dots,n\}, j\in\{1,\dots,m\}},$$
appelée la *matrice de covariance croisée.* On récupère la matrice de covariance de X par $\Sigma_X = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X,X)$.

1. Quelles sont les dimensions de la matrice $\mathrm{Cov}(X,Y)$?
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(Y,X) = \mathrm{Cov}(X,Y)^T$.
3. Calculer $\mathrm{Cov}(AX,Y)$, $\mathrm{Cov}(X,BY)$ et Σ_{AX}, où A, B sont des matrices réelles de dimensions convenables. *Conseil : On pourra utiliser les égalités $\mathbb{E}[AM] = A\mathbb{E}[M]$ et $\mathbb{E}[MB] = \mathbb{E}[M]B$ pour toute matrice aléatoire M et toutes matrices réelles A, B de dimensions convenables.*
4. Montrer que la matrice de covariance Σ_X est symétrique et positive, i.e. $v^T \Sigma_X v \geq 0$ pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. Que cela implique-t-il sur les vecteurs propres et les valeurs propres de Σ_X ?
5. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $v^T X$ est dégénérée, i.e. presque sûrement égale à une constante, si et seulement si v est dans le noyau de Σ_X.

Exercice 22 (Vecteur gaussien standard)**.** Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien standard n-dimensionnel, c'est-à-dire $X_1, \dots, X_n$ sont iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Donner la loi de $\|X\|_2$.
2. On note $O(n)$ le groupe des transformations orthogonales $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $O \in O(n)$, OX est encore un vecteur gaussien standard n-dimensionnel.

3. On note σ^{n-1} la loi de $X/\|X\|_2$. C'est une mesure de probabilité sur la sphère S^{n-1}. Montrer que σ^{n-1} est invariante par l'action de tout $O \in O(n)$, i.e. $O(X/\|X\|_2)$ est égale en loi à $X/\|X\|_2$. Pour cette raison, σ^{n-1} est appelée la *probabilité uniforme sur* S^{n-1}.
4. On souhaite montrer que $\|X\|_2$ et $X/\|X\|_2$ sont indépendantes. Pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on définit la mesure μ_f sur S^{n-1} par
$$\mu_f(B) = \mathbb{E}[f(\|X\|_2)\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)], \quad B \subset S^{n-1} \text{ mesurable.}$$
Montrer que la mesure μ_f est invariante par l'action de tout $O \in O(n)$, i.e. $\mu_f(B) = \mu_f(O^{-1}B)$ pour tout $B \subset S^{n-1}$ mesurable.
5. On admet que toute mesure sur S^{n-1} invariante par l'action de tout $O \in O(n)$ est un multiple de σ^{n-1} (une conséquence du *lemme de Christensen*). En déduire que pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et tout $B \subset S^{n-1}$ mesurable, on a
$$\mathbb{E}[f(\|X\|_2)\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)] = \mathbb{E}[f(\|X\|_2)]\mathbb{E}[\mathbf{1}_B(X/\|X\|_2)].$$
En déduire que $\|X\|_2$ et $X/\|X\|_2$ sont indépendantes.

Exercice 23 (Méthode Box–Muller)**.** Soient U, W deux v.a. iid selon Unif([0, 1]). Construire un vecteur gaussien standard deux-dimensionnel (X, Y) à partir de (U, W) en n'utilisant que les opérations suivantes : *addition, multiplication, racine carrée, logarithme, sinus, cosinus* et des constantes. Comparer (en vue d'application au calcul scientifique) cette méthode à la méthode "standard" qui consiste à poser $X = F^{-1}(U)$, où $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$ ou $F(x) = \mathbb{P}(X \ge x)$.

Exercice 24 (Extrait du partiel 2013)**.** Soit $(X, Y)^T$ un vecteur gaussien d'espérance $(1, 0)^T$ et de matrice de covariance
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
et S une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendante de $(X, Y)^T$.

1. Quelle est la loi de $W = 2 + 2X - Y$?
2. Soient Z et T deux variables indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $(X, Y)^T$ a même loi que $(1 + Z, Z + T)^T$.
3. Quelle est la loi de $(X - 1)^2 + (Y - X + 1)^2 + S$?

Exercice 25. Soit $(X, Y)^T$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver $A \in M_2(\mathbb{R})$ tq $(X, Y)^T \overset{\text{loi}}{=} A(G_1, G_2)^T$, où $(G_1, G_2)^T$ est un vecteur gaussien centré réduit.
2. En déduire $\mathbb{P}(X \ge 0,\ Y \ge 0)$.

Tribu terminale, convergence presque sûre, lemme de Borel–Cantelli

Exercice 26 (Tribu terminale)**.** Soit $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la tribu cylindrique $\mathcal{A}$. On définit la suite de v.a. $(X_n)_{n\ge0}$ par $X_n(\omega) = \omega_n$. On rappelle la définition de la tribu terminale
$$\mathcal{T} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots).$$
On pourra vérifier *(optionnel)* que $\sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$, avec $\mathbb{R}^n \times \mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A = \mathbb{R}^n \times A',\ A' \in \mathcal{A}\}$. Lesquels des événements suivants font partie de $\mathcal{T}$?

1. $A_1 = \{\limsup_{m\to\infty} X_m < \infty\}$
2. $A_2 = \{\lim X_m = 0\}$

3. $A_3 = \{X_m \neq 0 \ \forall m \in \mathbb{N}\}$
4. $A_4 = \{X_m = X_{m+2} \ \forall m \in \mathbb{N}\}$
5. $A_5 = \{\limsup_{m\to\infty} \sum_{k=0}^m X_k < \infty\}$
6. $A_6 = \{\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^m X_k = 0\}$

Exercice 27. Soit Ω un ensemble.

1. Étant fixés $B, C \subset \Omega$, on pose $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de l'ensemble Ω. Montrer que $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.
3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de l'ensemble Ω. Montrer que $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$. En déduire une inégalité entre $\mathbb{P}(\liminf A_n)$ et $\liminf \mathbb{P}(A_n)$, ainsi qu'entre $\mathbb{P}(\limsup A_n)$ et $\limsup \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 28. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements indépendants. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ ainsi que $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$ pour tout entier n. Donner une CNS sur la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, puis étudier la convergence presque sûre (vers 0).

Exercice 29. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles positives (pas nécéssairement indépendantes), montrer que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ converge en probabilité si et seulement si S_n converge p.s.

Exercice 30. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid de moyenne μ et variance finies. A l'aide de la loi forte des grands nombres, montrer que

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j \to \mu^2, \quad \text{presque sûrement.}$$

Exercice 31. Soit $(T_k)_{k\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $k \geq 2$, T_k suit la loi exponentielle de paramètre $\ln(k)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(T_k \geq 1)$, ainsi que $\mathbb{P}(T_k \geq 1 + \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. En déduire, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, que

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{k\to\infty} T_k = 1.$$

Exercice 32. Soient $X, X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

1. En utilisant la formule $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)\, dx$, montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X > an) < \infty.$$

2. Montrer que presque sûrement,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} X_n = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbb{E}[X] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X] = \infty, \end{cases}$$

Exercice 33 (Loi du logarithme itéré.)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. On pose $h(x) = (2x \log\log x)^{1/2}$ pour $x \geq \mathrm{e}$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} = 1, \quad \text{p.s.}.$$

On admet les estimées suivantes :

$$\mathbb{P}(X_1 > x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}, \quad x \to \infty \tag{1}$$

$$\forall n \geq 1\, \forall x > 0 : \mathbb{P}(\max_{k\in\{1,\ldots,n\}} S_k > x) \leq 2\mathbb{P}(S_n > x). \tag{2}$$

1. Soit $K > 1$. Majorer la quantité $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right)$ et montrer que $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} \leq K$ presque sûrement.
2. En déduire que $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} \leq 1$ presque sûrement.
3. On fixe $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, $r < \sqrt{\frac{M-1}{M}}$. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'événement A_k par
$$A_k = \{|S_{M^k} - S_{M^{k-1}}| \geq rh(M^k)\} \cap \{\mathrm{sgn}(S_{M^k} - S_{M^{k-1}}) = \mathrm{sgn}(S_{M^{k-1}})\}.$$
Montrer que les événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendants et que $\mathbb{P}(\limsup A_k) = 1$.
4. En déduire que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{h(n)} \geq 1, \quad \text{p.s..}$$
5. A l'aide de la loi du 0-1 de Kolmogorov, déduire de la dernière partie que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{h(n)} \geq 1, \quad \text{p.s..}$$
6. Conclure.
7. *optionnel* : Donner une preuve alternative de la borne inférieure (partie 5) en utilisant l'Exercice 34 ci-dessous.
8. *optionnel* : Montrer l'estimée (1).

Exercice 34 (Borel–Cantelli sans hypothèse d'indépendance)**.** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On suppose que
$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n}[\mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)]}{\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)^2} \leq 0.$$
Montrer que $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$. *Conseil : étudier la suite de v.a.* $X_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}$.

Convergences de variables aléatoires : dans L^p, en probabilité, en loi

Intégrabilité uniforme, convergence L^p

Exercice 35. Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{i\in I}$ deux familles de v.a. dans $\mathbb{R}^d$ uniformément intégrables. Montrer que la somme $(X_i + Y_i)_{i\in I}$ l'est aussi.

Exercice 36. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable telle que $\|f(x)\| \leq C(\|x\| + 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour une certaine constante $C < \infty$. Montrer que si la famille $(X_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable, alors la famille $(f(X_i))_{i\in I}$ l'est encore.

Exercice 37. Soit $p \geq 1$ et soient $X, X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

1. $X, X_1, X_2, \ldots \in L^p$ et $X_n \to X$ dans L^p
2. $X_n \to X$ en probabilité et la suite $(\|X_n\|^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est uniformément intégrable.

Conseil : Pensez à l'inégalité de Minkowski : $\|Y + Z\|_p \leq \|Y\|_p + \|Z\|_p$.

Exercice 38 (Lemme de Scheffé)**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles positives. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] < \infty$ pour tout n. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X_∞ et si $(\mathbb{E}[X_n])_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbb{E}[X_\infty] < \infty$, montrer alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X_∞ dans L^1. *Conseil : Utiliser (après vérification) la formule* $|a - b| = a + b - 2\min(a, b)$ *pour* $a, b \in \mathbb{R}$.

Convergence en loi

Exercice 39. Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $np_n \to \lambda \in \mathbb{R}_+$. Montrer par calcul direct *et* par les fonctions génératrices que la loi binomiale de paramètres n et p_n converge vers la loi de Poisson de paramètre λ quand $n \to \infty$.

Exercice 40. Pour tout $p \in (0,1]$, soit X_p une variable aléatoire géométrique de paramètre p. Quand $p \to 0$, montrer par calcul direct *et* par les fonctions caractéristiques que pX_p tend en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 41. Soient $X_1, X_2, \dots$ des v.a. iid de loi Exp(1). Montrer que $\max(X_1,\dots,X_n) - \log n$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la limite.

Exercice 42. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$.

Exercice 43. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une variable aléatoire X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que f est continue μ_X-presque partout. Montrer que $f(X_n)$ converge en loi vers $f(X)$. *Conseil : Utiliser le théorème de représentation de Skorokhod.*

Exercice 44. Soient $(X_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (X_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de v.a. réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(k)}$ sont indépendantes. On suppose pour tout $i = 1,\dots,k$ que $X_n^{(i)} \to X^{(i)}$ en loi quand $n \to \infty$, où $X^{(1)},\dots,X^{(k)}$ sont des v.a. réelles qu'on suppose indépendantes. Montrer que $(X_n^{(1)},\dots,X_n^{(k)}) \to (X^{(1)},\dots,X^{(k)})$ en loi quand $n \to \infty$.

Exercice 45 (Lois stables)**.** Soient $X_1, X_2, \dots$ des copies iid d'une v.a. réelle X dont la loi est de densité

$$f(x) = \frac{c_\alpha}{1+|x|^{\alpha+1}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

pour un certain $\alpha \in]1,2[$. Ici, c_α est un constante de normalisation. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Le but de cet exercice est de montrer que $S_n/n^{1/\alpha}$ converge en loi quand $n \to \infty$ et d'identifier la loi limite.

1. On note φ_X la fonction caractéristique de X. Montrer que
$$\varphi_X(\lambda) - 1 = \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) f(x)\, dx.$$
Note : montrer en particulier que $x \mapsto (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, telle que
$$\varphi_X(\lambda) - 1 \sim -C|\lambda|^\alpha, \quad \lambda \to 0.$$
3. Montrer que
$$\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n/n^{1/\alpha}}] \to e^{-C|\lambda|^\alpha}, \quad n \to \infty$$
4. En déduire que $\lambda \mapsto e^{-C|\lambda|^\alpha}$ est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.
5. Soit Y une v.a. de fonction caractéristique $\lambda \mapsto e^{-C|\lambda|^\alpha}$. Soit Y' une copie indépendante de Y. Montrer que pour tout $a, b > 0$,
$$aY + bY' \overset{\text{loi}}{=} (a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} Y$$
La loi d'une variable ayant cette propriété est dite une *loi α-stable*. Quelles lois 2-stables connaissez-vous ?

Théorème central limite

Exercice 46. Soient $X_1, X_2, \dots$ des v.a. réelles iid de moyenne nulle et variance 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $A_n = S_n/\sqrt{n}$. Montrer que $A_{2n} - A_n$ ne tend pas vers 0 en probabilité. En déduire que $S_n/\sqrt{n}$ ne converge pas en probabilité.

Exercice 47. Soient $X_1, X_2, \dots$ des v.a. réelles iid de moyenne μ et variance finie. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que la suite des variables aléatoires $\left(\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n}}\right)^2$ est uniformément intégrable. *Conseil : Utiliser le TCL, puis le théorème de représentation de Skorokhod, puis appliquer le lemme de Scheffé.*

Exercice 48 (Problème des allumettes de Banach)**.** Un fumeur a dans chacune de ses poches une boîte contenant n allumettes. À chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il la prend dans l'une ou l'autre boîte avec probabilité $1/2$. Soit X_n le nombre d'allumettes restant dans une boîte quand le fumeur s'aperçoit *pour la première fois* que l'autre boîte est vide.

1. Formaliser l'expérience. Exhiber deux suites de v.a. iid de loi géométrique et exprimer X_n en fonction de celles-ci.
2. Etudier la convergence en loi de $X_n/\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$ lorsque $n \to \infty$ en justifiant bien la réponse. *Conseil : On pourra utiliser l'exercice ci-dessous.*

Theorème central limite multidimensionnel

Exercice 49. Soit X un vecteur gaussien n-dimensionnel de moyenne μ et matrice de covariance Σ_X. Si $v_1, \ldots, v_k$ est une famille orthonormale de vecteurs propres de Σ_X, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, donner la loi du vecteur $(v_1^T X, \ldots, v_k^T X)^T$. *Conseil : Pour se simplifier la vie, utiliser des matrices.*

Exercice 50. Soient $p_1, \ldots, p_k > 0$ tels que $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. On note Y une v.a. sur $\{1, \ldots, k\}$ de loi $\mathbb{P}(Y = i) = p_i$ et on pose $X = (\mathbb{1}_{Y=1}, \ldots, \mathbb{1}_{Y=k})^T$, si bien que X suit la loi multinomiale de paramètres 1 et $p_1, \ldots, p_k$.

1. Si $X_1, X_2, \ldots$ sont iid de même loi que X, montrer que $(\sum_{i=1}^n X_i - (np_1, \ldots, np_k)^T)/\sqrt{n}$ tend en loi vers un vecteur gaussien Z dont on précisera la moyenne μ et la matrice de covariance Σ.
2. Donner un vecteur propre de la matrice Σ de valeur propre zéro. Que peut-on en déduire sur Z ?
3. Soit $D = \mathrm{diag}(p_1^{-1/2}, \ldots, p_k^{-1/2})$. Montrer que la matrice $D\Sigma D$ est la projection orthogonale sur l'espace $\mathbf{p}^\perp$, où $\mathbf{p} = (p_1^{1/2}, \ldots, p_k^{1/2})^T$.
4. En déduire la loi limite de $\|D(\sum_{i=1}^n X_i - (np_1, \ldots, np_k)^T)/\sqrt{n}\|_2^2$. *Conseil : Utiliser l'exercice ci-dessous.*

Espérance conditionnelle

Propriétés générales

Exercice 51. Soit $X \in L^1$, $\mathcal{F}$ une tribu et $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ une classe d'ensembles stable par intersection finie qui engendre $\mathcal{F}$ et qui contient Ω. Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est l'unique (p.s.) variable aléatoire intégrable et $\mathcal{F}$-mesurable telle que $\mathbb{E}[X\mathbb{1}_C] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{1}_C]$ pour tout $C \in \mathcal{C}$.

Exercice 52. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes (à valeurs dans des espaces quelconques) et $f \in L^1(\mu_X \otimes \mu_Y)$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}[f(X,Y) \,|\, X] = \mathbb{E}[f(\cdot, Y)](X) \left(= \int f(X,y)\, \mu_Y(dy) \right)$$

2. *Application.* Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes et strictement positives. On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer $E[\frac{X}{X+Y} \,|\, Y]$.

Exercice 53. Soit Y une variable aléatoire réelle intégrable définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose que les tribus $\sigma(Y) \vee \mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}_1].$$

Conseil : Utiliser l'Exercice 51.

Exercice 54. On dit que deux variables aléatoires X et Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?

2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z, $\mathcal{G}$-mesurable, positive, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,
$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$
et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,
$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$
Conseil : Exercice 51 pour la dernière égalité.

Exercice 55 (Théorème de la variance totale)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $X \in L^2$ et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ des tribus.

1. Montrer que pour tout $Y \in L^2$ on a
$$\mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]Y\,|\,\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]\,|\,\mathcal{G}].$$
2. Montrer qu'on a
$$\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])\,\big|\,\mathcal{G}\big] = 0, \quad \text{p.s.}$$
3. On définit la *variance de X conditionnellement à $\mathcal{F}$* :
$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2\,|\,\mathcal{F}].$$
Montrer le théorème de la variance totale :
$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\,|\,\mathcal{G}) + \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X|\mathcal{F})\,|\,\mathcal{G}].$$
Donner une preuve plus simple quand $\mathcal{G}$ est la tribu triviale, en utilisant le fait que $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ est la projection orthogonale de X dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ sur le sous-espace des v.a. $\mathcal{F}$-mesurables.

Exercice 56. Donner (et démontrer) des versions "conditionnelles" des inégalités de Markov et de Chebychev.

Exemples

Exercice 57. Soit $X \in L^2$, de loi symétrique, i.e. X et $-X$ ont même loi. Calculer $\mathbb{E}[X^2|X]$ et $\mathbb{E}[X|X^2]$.

Exercice 58. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, intégrables et i.i.d. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_1|S_n]$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X_1|S_n]$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X_1|S_n, S_{n+1}, \ldots]$.

Exercice 59. Soit $p \geq 1$ et soient $X, Y \in L^p$.

1. Montrer que $\|X + Y\|_p \geq \|X + \mathbb{E}[Y|X]\|_p$.
2. En déduire que, si X et Y sont indépendantes, alors $\|X + Y\|_p \geq \|X + \mathbb{E}(Y)\|_p$.

Exercice 60. Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables. Montrer l'équivalence des points suivants :

1. $\mathbb{E}[X|Y] \leq Y$ p.s. et $\mathbb{E}[Y|X] \leq X$ p.s.
2. $\mathbb{E}[X|Y] \geq Y$ p.s. et $\mathbb{E}[Y|X] \geq X$ p.s.
3. $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ p.s. et $\mathbb{E}[Y|X] = X$ p.s.
4. $X = Y$ p.s.

Conseil : Montrer d'abord l'équivalence entre 1. et 3., puis entre 2. et 3. Pour montrer l'équivalence avec 4., étudier d'abord le cas où X, Y sont de carrés intégrables, puis le cas où X, Y sont positives, puis le cas général.

Exercice 61. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de X_1 conditionnellement à $X_1 + X_2$ (donc calculer $\mathbb{P}(X_1 = k|X_1 + X_2 = n)$).
Conseil : On peut faire cela par calcul direct ou en utilisant l'exercice 5 de la feuille TD n° 2.

Exercice 62. Soient X et Y deux variables aléatoires positives indépendantes de lois respectives de densités p_1 et p_2 par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $S = X + Y$. Exprimer la loi de X conditionnellement à S en fonction de p. Expliciter dans le cas où $X \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$.

Exercice 63. Soient X, Y deux variables aléatoires gaussiennes centrées et indépendantes, de variances respectives σ_X^2 et σ_Y^2.

1. Donner la loi de $X + Y$ conditionnellement à X.
2. Donner la loi de X conditionnellement à $X + Y$.
   Conseil : trouver $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $X + Y \perp aX + bY$ et exprimer X en fonction de ces deux v.a.

Exercice 64 (Processus de Poisson homogène sur $\mathbb{R}_+$)**.** Soient $Y_1, Y_2, \dots$ des v.a. iid de loi $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. On pose $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. On définit la mesure aléatoire $\Pi = \sum_{n=1}^\infty \delta_{X_n}$, qu'on appelle *le processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité λ*.

1. Montrer l'égalité $\frac{1}{n!}\int_t^\infty x^n e^{-x}\,dx = e^{-t}\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$.
2. Montrer que $\Pi([0,t))$ suit la loi de Poisson de paramètre λt pour tout $t > 0$.
3. Soit $t > 0$. On pose $X_i^{(t)} = X_{\Pi([0,t))+i} - t$ pour tout $i \geq 1$. Montrer que $\mathbb{P}(X_1^{(t)} \geq y,\, \Pi([0,t)) = n) = e^{-\lambda y}\mathbb{P}(\Pi([0,t)) = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$. En déduire la loi jointe de $(X_1^{(t)}, \Pi([0,t)))$.
4. Montrer l'indépendance entre la suite $(X_k^{(t)} - X_{k-1}^{(t)})_{k\geq 2}$ et le vecteur $(X_1^{(t)}, \Pi([0,t)))$ et donner la loi de $(X_k^{(t)} - X_{k-1}^{(t)})_{k\geq 2}$.
5. En déduire que $(X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \dots)$ est indépendante de $\Pi([0,t))$ et de même loi que $(X_1, X_2, \dots)$.
6. Montrer que pour tous $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$, les v.a. $\Pi([t_0,t_1)), \dots, \Pi([t_{k-1},t_k))$ sont indépendantes et de lois respectives $\mathrm{Po}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$, $i = 1, \dots, k$.

Processus et martingales

Filtrations, temps d'arrêt

Exercice 65 (Temps d'arrêt)**.** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et T et S deux temps d'arrêt. Montrer que

1. $S \wedge T$, $S \vee T$, $S + T$ sont des temps d'arrêt.
2. Si T est un temps d'arrêt constant ($T = p$ avec $p \in \mathbb{N}$), alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_p$.
3. Si $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
4. $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
5. $\{S < T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, $\{S = T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
6. Si $(T_k)_{k\geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\limsup T_k$ et $\liminf T_k$ sont des temps d'arrêt.

Exercice 66. On considère une suite $(X_n,\, n \geq 0)$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $[0,1]$, indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k,\, k \leq n)$. On introduit la variable aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(F_n)_n$.
2. Déterminer la loi de T. *Conseil : calculer $\mathbb{P}(T > n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 67 (Principe de réflexion)**.** Soient $X_1, X_2, \dots$ de v.a. réelles iid de loi symétrique (càd $\mu_{X_1} = \mu_{-X_1}$). On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geq 0$. Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\max_{k\leq n} S_k \geq x) \leq 2\mathbb{P}(S_n \geq x).$$

Dans ce qui suit, on suppose toujours que $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ arbitraire. On introduit $T_x = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k \geq x\}$.

1. Montrer l'égalité des événements $\{T_x \leq n\} = \{\max_{k\leq n} S_k \geq x\}$. En déduire que T_x est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Montrer l'inclusion des événements $\{S_n \geq x\} \subset \{T_x \leq n\}$.
3. Montrer que
$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \geq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0,\, T_x = k)$$
4. Montrer que la loi de $S_n - S_k$ est symétrique.
5. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$,
$$\mathbb{P}(S_n - S_k \geq 0 \,|\, \mathcal{F}_k) \geq 1/2.$$
6. Conclure.

Martingales

Exercice 68. Soient $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux sous-martingales. Montrer que $(M_n \vee N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une sous-martingale.

Exercice 69 (Décomposition de Doob d'une sous-martingale)**.** Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale. Montrer qu'il existe un (p.s.) unique processus prévisible et croissant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $(M_n - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et $A_0 = 0$.

Exercice 70 (Inégalité maximale pour les surmartingales positives)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une surmartingale sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que si H est un processus prévisible, positif et borné, alors le processus $H \cdot X$ est encore une surmartingale.
2. Montrer que si T est un temps d'arrêt, alors $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une surmartingale (on pourra utiliser 1.).
3. On suppose maintenant que $(X_n)_{n\geq 0}$ est positive. Montrer que pour tout $a > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n \geq a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a}.$$

Exercice 71 (Martingales de carrés intégrables)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est de carré intégrable, i.e. $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $X_{-1} = 0$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})(X_m - X_{m-1})] = 0$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.
2. Soit $-1 \leq m \leq n$. Montrer que $\mathbb{E}[(X_n - X_m)^2] = \sum_{i=m+1}^{n} \mathbb{E}[(X_i - X_{i-1})^2]$.
3. Montrer l'équivalence entre les points suivants :
   (a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ (on dit dans ce cas que $(X_n)_{n\geq 0}$ est *bornée dans* L^2)
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2] < \infty$

Exercice 72 (Processus de Galton–Watson)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$, $X_0 = 1$, un processus de Galton–Watson de loi de reproduction μ d'espérance $m > 1$ et de variance $\sigma^2 < \infty$. On pose $W_n = X_n/m^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(W_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2 (par rapport à sa filtration canonique $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
Conseil : pour la bornitude dans L^2, on pourra d'abord calculer $\mathrm{Var}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 73 (Variation quadratique d'une martingale)**.** Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que $(M_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.
2. On note $\langle M\rangle$ l'unique (p.s.) processus prévisible et croissant tel que $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale et tel que $\langle M\rangle_0 = 0$ (cf. Exercice 69). On appelle $\langle M\rangle$ la *variation quadratique* de la martingale M. Montrer que
$$\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n = \mathrm{Var}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Montrer que $\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M \rangle_n]$.
4. Soit T un temps d'arrêt. Montrer que $\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$.
5. On suppose que $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. iid de carré intégrable et $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration canonique de M. Calculer $\langle M \rangle$.

Exercice 74 (Martingales exponentielles de la marche aléatoire)**.** Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_1, X_2, \ldots$ sont iid avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que $W_n(\theta) = \exp(\theta S_n)/\cosh(\theta)^n$ est une martingale.

Exercice 75 (Processus de Poisson)**.** Soit Π un processus de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\lambda > 0$. On définit pour $t \geq 0$, $N_t = \Pi((0,t])$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de $(N_t)_{t\geq 0}$.

1. Montrer que $N_0 = 0$ et que pour tout $s \leq t$, $N_t - N_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$ et de loi $\mathrm{Po}(\lambda(t-s))$.
2. Donner des fonctions $f(t)$, $g(t)$ et $h_\theta(t)$, $\theta \in \mathbb{R}$, telles que
$$(N_t - f(t))_{t\geq 0}, \quad ((N_t - f(t))^2 - g(t))_{t\geq 0} \quad \text{et} \quad (e^{\theta N_t - h_\theta(t)})_{t\geq 0}$$
sont des martingales.
3. Pour chacune des martingales de la dernière partie, étudier si elle converge ou non p.s. quand $t \to \infty$.

Convergence de martingales et théorème d'arrêt

Exercice 76. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale avec $|X_{n+1} - X_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $M < \infty$ une constante. Soit
$$C = \{\lim X_n \text{ existe et est finie}\}$$
$$D = \{\limsup X_n = +\infty \text{ et } \liminf X_n = -\infty\}.$$
Montrer que $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$.
Conseil : On pourra étudier la martingale arrêtée aux temps $T_K = \inf\{n \geq 0 : X_n \leq -K\}$ et/ou $T'_K = \inf\{n \geq 0 : X_n \geq K\}$ pour $K \in \mathbb{N}$.

Exercice 77 (Lemme de Borel–Cantelli)**.** Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements avec $A_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\limsup A_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \infty \right\} \quad \text{presque sûrement.}$$
Conseil : utiliser le dernier exercice.

Exercice 78 (Quelques (contre-)exemples)**.**

1. *Un exemple de martingale qui converge presque sûrement mais n'est pas bornée dans L^1.* On considère une famille $(Y_n, \varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout n, la loi de Y_n est $\frac{1}{2}(\delta_{a_n} + \delta_{-a_n})$, où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs fixée, et la loi de ε_n est $\frac{1}{n^2}\delta_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\delta_0$. On définit, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \varepsilon_1, \ldots, Y_n, \varepsilon_n)$ et $M_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k Y_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et qu'elle converge presque sûrement. Montrer qu'on peut choisir $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que cette martingale ne soit pas bornée dans L^1.
2. *Un exemple de martingale qui tend presque sûrement vers $+\infty$.* On considère $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que
$$\mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\xi_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$
On pose $M_n = \xi_2 + \ldots + \xi_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 2}$ est une martingale telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.

Exercice 79 (Sommes aléatoires)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une famille de v.a. i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels tels que $\sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty$. Montrer que la somme $\sum_{n=1}^\infty a_n X_n$ converge p.s.

Exercice 80 (Théorème de Rademacher). L'objectif de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $(0,1)$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n}$ et $Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right)$.

1. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : [0,1) \to [0,1)$, $x \mapsto \lfloor 2^n x \rfloor 2^{-n}$. Si $x \in [0,1)$, de décomposition dyadique minimale [2] $x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}$ avec $b_k \in \{0,1\}$, $k \geq 1$, montrer que $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k 2^{-k}$. En déduire que $\varphi_k \circ \varphi_n = \varphi_k$, pour $0 \leq k \leq n$.
2. Montrer les égalités de tribus suivantes :
$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n \geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$
3. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
4. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite presque sûre et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable et bornée telle que $Z = g(X)$.
5. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que
$$\text{p.s.} \qquad Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u) \mathrm{d}u.$$
6. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$,
$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u) \mathrm{d}u.$$

Exercice 81 (Martingales exponentielles de la marche aléatoire). Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, où $X_1, X_2, \ldots$ sont iid avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Nous rappelons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $W_n(\theta) = \exp(\theta S_n)/\cosh(\theta)^n$ est une martingale.

1. Montrer que $W_n(\theta) \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$, pour tout $\theta \neq 0$. En déduire que la martingale $W_n(\theta)$ n'est pas uniformément intégrable.
2. Soit T_1 le premier temps d'atteinte de 1 par la marche, i.e. $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$. Pour $\theta \geq 0$, montrer que
$$\mathbb{E}[\cosh(\theta)^{-T_1}] = e^{-\theta}.$$
3. Montrer que $\mathbb{E}[W_{T_{-1}}(\theta)] = e^{-2\theta}$ pour tout $\theta \geq 0$.
4. Quand $\lambda \downarrow 0$, montrer que $1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda T_1}] \sim C\sqrt{\lambda}$, pour une constante $C > 0$ à préciser.
   Pour info : la fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}[e^{-\lambda T_1}]$ s'appelle la transformée de Laplace *de T_1. Le résultat ci-dessus permet de montrer, par le biais d'un « théorème tauberien », que $\mathbb{P}(T_1 > k) \sim C'/\sqrt{k}$ pour une constante $C' > 0$.*
5. Pour tout $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, montrer que $Z_n(\gamma) = \cos(\gamma S_n)/\cos(\gamma)^n$ est une martingale (on pourra par exemple utiliser la partie 1 pour des $\theta \in \mathbb{C}$).
6. Pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, soit $T_{-a,a} = T_{-a} \wedge T_a$. Montrer que les martingales $(Z_{n\wedge T_{-a,a}}(\frac{\pi}{2a}))_{n\geq 0}$ et $(Z_n(\frac{\pi}{2a}))_{n\geq 0}$ ne sont pas uniformément intégrables.
7. En déduire que
$$\mathbb{E}[\cos\left(\tfrac{\pi}{2a}\right)^{-T_{-a,a}}] = \infty.$$
8. Montrer que pour tout $\gamma \in]-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}[$, $\mathbb{E}[Z_{T_{-a,a}}(\gamma)] \leq \mathbb{E}[Z_0(\gamma)] = 1$, et par conséquent,
$$\mathbb{E}[\cos(\gamma)^{-T_{-a,a}}] < \infty.$$
9. Donner une constante $\lambda_a \in \mathbb{R}$, telle que
$$\mathbb{E}[e^{\lambda T_{-a,a}}] < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda < \lambda_a.$$
   Donner un équivalent de λ_a quand $a \to \infty$.

2. On dit qu'une décomposition dyadique est *minimale* s'il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$, tel que $b_k = 1 \, \forall k \geq n$, i.e. si $\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k 2^{-k} < 2^{-n}$ pour tout n.

Exercice 82 (Modèle de Wright-Fisher)**.** On a une population de taille fixée $N \in \mathbb{N}^*$ qui se renouvelle entièrement à chaque génération et dont chaque individu est de type a ou A. Chaque individu de la génération $n+1$ choisit son (seul) parent de la génération n de façon uniforme et indépendante des autres individus et hérite le type du parent.

On note X_n le nombre d'individus de type a dans la génération n et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, \dots, X_n)$. On a alors $\mathbb{P}(X_{n+1} = i \,|\, \mathcal{F}_n) = \binom{N}{i}(\frac{X_n}{N})^i(1-\frac{X_n}{N})^{N-i}$, pour tout $i \in \{0, \dots, N\}$. On suppose que p.s. $X_0 = k \in \{0, \dots, N\}$.

1. Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une martingale et discuter la convergence de X_n vers une variable X_∞ quand $n \to \infty$.
2. Montrer que $M_n := (\frac{N}{N-1})^n X_n(N - X_n)$ est une martingale.
3. Calculer $\mathbb{E}[X_\infty]$ et $\mathbb{E}[X_\infty(N - X_\infty)]$.
4. Calculer la loi de X_∞ et commenter.

Exercice 83 (Un jeu de cartes)**.** On prend un jeu de 52 cartes, on les retourne une à une ; le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire "rouge la prochaine !", il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd. On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire.

1. Soit R_n (pour $0 \leq n \leq 51$) le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'événement {la n-ième carte retournée est rouge}. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j)$, pour $j \in \{0, \dots, 26\}$, $n \in \{0, \dots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j \,|\, \mathcal{F}_n)$, où $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$, $n \in \{0, \dots, 50\}$, $j \in \{0, \dots, 26\}$. Montrer que
$$\mathbb{E}[R_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52-n}, \quad n = 0, \dots, 50.$$
Montrer que $X_n := R_n/(52-n)$, $n = 0, \dots, 50$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)$.
3. On définit $\tau = n \in \{0, \dots, 52\}$ si le joueur dit "rouge la prochaine !" avant de retourner la $(n+1)$-ième carte. On suppose que τ est un temps d'arrêt (pourquoi ?). Montrer que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}[X_\tau]$ et la calculer.

Chaînes de Markov. Étude qualitative et quelques exemples.

Exercice 84. Le chauffage d'une maison individuelle est composé d'un chauffage de base et d'un chauffage d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, dans l'état 2 si les deux chauffages fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime que le lendemain on est encore dans l'état 1 avec une probabilté 1/2. Si on est dans l'état 2, le lendemain la maison sera chaude et on pourra passer à l'état 1 avec probabilité 3/4. Soit X_n l'état du système au jour n.

1. Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer la matrice de transition Q.
2. Soit $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1), n \geq 0$. Déterminer une relation de recurrence entre p_n et p_{n+1}.
3. Sachant qu'on est dans l'état 1 un dimanche, trouver la probabilité d'être dans le même état le dimanche suivant.
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec probabilité 3/5, alors tous les jours, on a encore une probabilité 3/5 d'être dans l'état 1.
5. Chaque journée dans l'état 1 coûte 2 euros, dans l'état 2 coûte 4 euros et chaque transition de 1 à 2 ou de 2 à 1 coûte 1 euro. Calculer le coût moyen dans la situation précédente.

Exercice 85. On considère la matrice de Markov suivante (l'espace d'états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et les

$*$ sont des coefficients non nuls) :

$$Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in E^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Trouver les états absorbants, transitoires et les classes de récurrence. On pourra se servir d'une représentation graphique.

Exercice 86. Soit ξ_n le résultat du n-ième jet d'un dé, autrement dit, soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une famille de v.a. iid de loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$. On pose pour tout $n \geq 1$, $X_n = \max\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$, avec $X_0 = 1$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\{1,\dots,6\}$. Donner la matrice de transition Q, ainsi que Q^n pour tout $n \geq 1$. Classifier les états.

Exercice 87. Soit E dénombrable. On dit qu'un processus stochastique $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov *inhomogène*, s'il existe des matrices $(Q_n)_{n\geq 0}$, telles que $\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_0,\dots,X_n) = Q_n(X_n, y)$ pour tout n. Montrer que le *processus espace-temps* $((X_n, n))_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (classique) sur $E \times \mathbb{N}$ et donner sa matrice de transition.

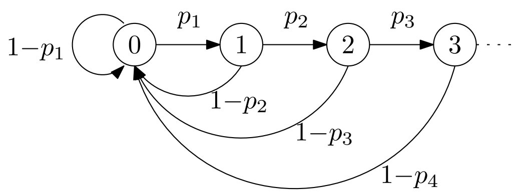

Figure 1 – Les transitions de la chaîne de Markov de l'Exercice 88.

Exercice 88. On étudie la chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ de transitions données dans la Figure 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ pour que 0 soit un état récurrent.

Exercice 89. On étudie une file d'attente à un guichet. On note ξ_{n+1} le nombre de clients arrivant entre les temps n et $n+1$. Un client arrivant dans cette période sera servi (et donc enlevé de la file) à l'instant $n+1$, même si personne ne se trouvait au guichet quand il est arrivé. On note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n.

1. Montrer que $X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1} - 1)^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (\xi_k - 1)$ et $M_n = \min\{0, S_0, S_1, \dots, S_n\}$, si bien que $M_0 = 0$ et $M_{n+1} = \min(M_n, S_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $S_n - M_n = X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. À partir de maintenant, on suppose que les variables ξ_n, pour $n \geq 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu = (\mu(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\mu(0) > 0$ et $\mu(k) > 0$ pour un $k \geq 2$. De plus, on suppose X_0 indépendante de la suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition. Montrer que la chaîne est irréductible.
4. Montrer, en utilisant la loi forte des grands nombres, que si $\mathbb{E}(\xi_1) > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$.
5. On note $T = \inf\{n \geq 0 \mid S_n = 0\}$. Montrer que $X_n = S_n$ pour tout $n \leq T$, p.s. En déduire que si $\mathbb{E}(\xi_1) \leq 1$, l'état 0 est récurrent. En déduire que tous les états sont récurrents.

Exercice 90. On considère la marche aléatoire simple sur l'arbre binaire en tant que chaîne de Markov. Montrer que la chaîne est irréductible. La marche est-elle récurrente ou transitoire ?

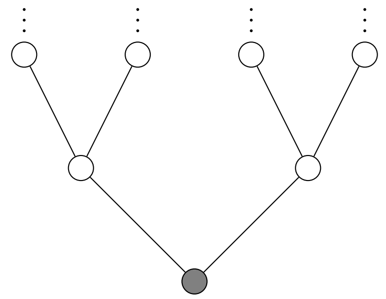

Figure 2 – Un arbre binaire (avec une racine marquée).

Chaînes de Markov : Mesures invariantes, périodicité, martingales, fonctions harmoniques.

Exercice 91 (Chaîne de naissance et mort)**.** On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à espace d'états $\mathbb{N}$ et de matrice de transition Q telle que

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible si et seulement si $p_i > 0$ et $q_{i+1} > 0$ pour tout $i \geq 0$.

On suppose à partir de maintenant que la chaîne est irréductible. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_i = \inf\{n \geq 0 \mid X_n = i\} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{T}_i = \inf\{n > 0 \mid X_n = i\}.$$

De plus, étant donnés trois états a, x et b tels que $a \leq x \leq b$, on pose

$$u(x) = \mathbb{P}_x(T_a > T_b) \qquad \text{et} \qquad \gamma(x) = \begin{cases} \frac{q_1\cdots q_x}{p_1\cdots p_x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que $u(a) = 0$, $u(b) = 1$ et $u(x) = Qu(x) = q_x u(x-1) + r_x u(x) + p_x u(x+1)$ pour tout $a < x < b$. En déduire une relation entre $u(x+1) - u(x)$ et $u(x) - u(x-1)$ pour $a < x < b$, puis que
$$u(x) = \frac{\gamma(a) + \ldots + \gamma(x-1)}{\gamma(a) + \ldots + \gamma(b-1)}$$
pour $a \leq x \leq b$. Traiter le cas particulier où $p_x = q_x$ pour tout $x > 0$.
3. Montrer que $\mathbb{P}_1(T_0 = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_1(T_0 > T_n)$. En déduire que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{x=0}^{\infty} \gamma(x) = \infty$.
4. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible ζ (avec $\zeta(0) = 1$) et déterminer ζ. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne admette une mesure de probabilité invariante. En déduire que la chaîne est récurrente positive si et seulement si
$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_0 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_x} < \infty.$$
5. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(\widetilde{T}_i)$ pour tout $i \geq 0$.

Exercice 92 (Une chaîne périodique)**.** On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\{0, \ldots, m-1\}$, $m \in \mathbb{N}^*$, de matrice de transition
$$Q(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \equiv x+1 \bmod m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible.
2. Calculer Q^n pour tout $n \geq \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la période de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$.
4. Donner une probabilité stationnaire de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$. Y en a-t-il d'autres ?

Exercice 93 (*Lazy chain*)**.** Soit Q la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace dénombrable E. On définit un processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ comme suit : conditionnellement à $Y_0, \ldots, Y_n$, soit Y'_{n+1} une v.a. de loi $Q(Y_n, \cdot)$, et B_{n+1} une v.a. de loi $\mathcal{B}(p)$, indépendante de Y'_{n+1}, avec $p \in (0,1)$. On définit alors $Y_{n+1} = Y'_{n+1}$ si $B_{n+1} = 1$ et $Y_{n+1} = Y_n$ sinon.

1. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
2. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si $(X_n)_{n\geq 0}$ l'est.
3. Montrer que μ est une mesure invariante pour $(Y_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si μ est une mesure invariante pour $(X_n)_{n\geq 0}$.
4. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est apériodique.
5. Supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible et récurrente positive. En déduire un résultat de convergence de $(Y_n)_{n\geq 0}$. Cette convergence a-t-elle lieu pour $(X_n)_{n\geq 0}$ également ?

Exercice 94. Soit S un ensemble dénombrable. On note $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel des applications bornées de S dans $\mathbb{R}$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans S de fonction de transition $Q = (Q(i,j))_{(i,j)\in S}$. Montrer qu'il existe un opérateur linéaire $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{H}$, la suite $(M_n^f)_{n\geq 0}$ définie par

$$M_0^f = f(X_0) \qquad \text{et} \qquad M_n^f = f(X_n) - \sum_{i=0}^{n-1} Af(X_i) \qquad \text{pour} \qquad n \geq 1$$

soit une martingale pour la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$. *Remarque : On a utilisé ici la notation $Af = A(f)$.*

Exercice 95 (Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet)**.** Soit Q la matrice de transition d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace dénombrable E. On dit qu'une fonction $u : E \to \mathbb{R}$ est *harmonique en* $x \in E$ si

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(X_1)] = \sum_{y\in E} Q(x,y)u(y) =: Qu(x).$$

On dit que u est *harmonique* si u est harmonique en tout $x \in E$, càd quand $u = Qu$.

1. Soit $x \in E$ un état non-absorbant. Si u est une fonction harmonique en $x \in E$, montrer que $u(x) \leq \sup\{u(y) \,|\, y \neq x, Q(x,y) > 0\}$ (le *principe du maximum*).
2. Montrer que u est harmonique si est seulement si $(u(X_n))_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$ (sous $\mathbb{P}_x$ pour tout $x \in E$).
3. Soit $A \subset E$ et notons $T_{A^c} = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n \in A^c\}$. Montrer que le processus $(X_{n\wedge T_{A^c}})_{n\geq 0}$ est encore une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition Q_A. Montrer que toute fonction u harmonique sur A (càd harmonique en tout $x \in A$) est harmonique pour cette chaîne, càd $u = Q_A u$.
4. Soit $A \subset E$ fini et supposons que $\partial A = \{y \in A^c \,|\, \exists x \in A : Q(x,y) > 0\}$ est fini. Supposons de plus que $\mathbb{P}_x(T_{A^c} < \infty) = 1$ pour tout $x \in A$. Soit u une fonction harmonique sur A. Montrer que les valeurs de u sur A sont déterminées par les valeurs de u sur ∂A.

Exercice 96 (Bonus : Fonctions harmoniques et propriété de Liouville)**.** On reprend les notations du dernier exercice. On dit que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est *Liouville* si les seules fonctions harmoniques bornées sont les constantes.

1. Supposons que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente. Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est Liouville.
2. Pour tout $x \in E$, soit $X^x = (X_n^x)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de même loi que $(X_n)_{n\geq 0}$ sous $\mathbb{P}_x$ (càd, X^x est une chaîne de Markov de noyau de transition Q et $X_0^x = x$ p.s.) Supposons que pour tout $x, y \in E$ il existe un couplage de X^x et X^y tel que $X_n^x = X_n^y$ à partir d'un certain rang, presque sûrement. Montrer que la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est Liouville.

3. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ la *lazy chain* de $(X_n)_{n\geq 0}$ (voir Exercice 93), pour un $p \in (0,1)$ quelconque. Montrer que u est harmonique pour $(X_n)_{n\geq 0}$ si et seulement si u est harmonique pour $(Y_n)_{n\geq 0}$.
4. Construire un couplage comme dans la seconde partie de l'exercice pour une version *lazy* de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la MAS sur $\mathbb{Z}^d$ est Liouville pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ (on dit alors aussi que le graphe $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, est Liouville).

Exercices supplémentaires

Exercice 97 (Problème du collectionneur de coupons)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(Y_{n,m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément dans l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$. Ainsi, pour tout entier $m \geq 1$, on peut dire que la variable $Y_{n,m}$ représente le choix d'un coupon parmi n possibles de façon uniforme et indépendante des choix effectués précédemment. Pour tout entier $k \in \{1,\ldots,n\}$, notons alors

$$\tau_{n,k} = \inf\big\{m \in \mathbb{N}^* \;\big|\; \mathrm{Card}\{Y_{n,1},\ldots,Y_{n,m}\} = k\big\}$$

le temps mis pour collecter k coupons différents, et notons aussi $\tau_{n,0} = 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique du temps $T_n = \tau_{n,n}$ mis pour obtenir tous les coupons possibles.

1. Pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, donner la loi de $X_{n,k} = \tau_{n,k} - \tau_{n,k-1}$. En déduire que, quand $n \to \infty$,
$$\mathbb{E}[T_n] \sim n\ln n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(T_n) = \mathrm{O}(n^2).$$
2. À l'aide de l'inégalité de Chebyshev, montrer que
$$\frac{T_n}{n\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 98 (Polynômes de Bernstein)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le polynôme de Bernstein de degré n associé à f est

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que $B_n(x) = \mathbb{E}[f(S_n(x)/n)]$, où $S_n(x)$ suit la loi binomiale de paramètres n et x.
2. En déduire, à l'aide de l'inégalité de Chebyshev, que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 99 (Variables aléatoires symétriques et fonctions caractéristiques)**.** La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite *symétrique* lorsque X et $-X$ ont même loi.

1. Montrer que la loi d'une v.a. réelle X est symétrique si et seulement si $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec φ_X la fonction caractéristique de X.
2. Soit Y une v.a. réelle et Z une v.a. indépendante de Y et de loi donnée par :
$$\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Z = -1).$$
Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et que $\mu_X = \frac{1}{2}(\mu_Y + \mu_{-Y})$, où μ_X et μ_Y sont les lois respectives de X et Y. Calculer φ_X en fonction de φ_Y.
3. Soit X une v.a. suivant la loi de densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$ sur $\mathbb{R}$ (dite la *loi de Laplace*). Montrer que $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
4. En déduire la fonction caractéristique d'une v.a. suivant une loi de Cauchy de paramètre 1 (densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$). Quelle est la loi de la moyenne arithmétique de deux v.a. indépendantes de loi de Cauchy de paramètre 1 ?
5. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des v.a. iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Rappeler leur fonction caractéristique. Calculer $\varphi_{X_1X_2}$, puis $\varphi_{X_1X_2+X_3X_4}$ et en déduire la loi de $X_1X_2 + X_3X_4$.

Exercice 100 (Loi bêta)**.** Soient G_1, G_2 deux v.a. indépendantes de lois respectives $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$. Déterminer la loi de $G_1/(G_1 + G_2)$, appelée la loi bêta de paramètres α_1 et α_2 et notée $B(\alpha_1, \alpha_2)$. En déduire les lois de $E_1/(E_1 + E_2)$ et de $N_1^2/(N_1^2 + N_2^2)$, où E_1, E_2 sont des variables exponentielles indépendantes et N_1, N_2 sont des gaussiennes centrées indépendantes. Pourquoi appelle-t-on la dernière la loi de l'arc sinus ?

Exercice 101. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. iid de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_1 \cdots X_k$. Montrer que Y_n converge dans L^1 vers une v.a. Y.
2. Montrer que $Y \overset{\text{loi}}{=} X(1 + Y)$, oú X est une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de Y.
3. Soit φ la fonction caractéristique de Y. Montrer l'égalité suivante :

$$\varphi(t) = \int_0^1 \varphi(tx) e^{itx}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. En déduire que $\varphi(t) = \exp(\int_0^t (e^{is} - 1)/s\, ds)$, $t \geq 0$, puis donner une expression valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Conseil : on pourra montrer que l'application $t \mapsto t\varphi(t)$ satisfait à une certaine équation différentielle et la résoudre.

Exercice 102 (Théorème de Glivenko-Cantelli)**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on définit $F_n(x)$ par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \text{Card}\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid X_j \leq x\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les $F_n(x)$ sont des variables aléatoires.

On considère ensuite la mesure de probabilité aléatoire

$$\Gamma_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{X_j}.$$

2. Montrer que F_n est la fonction de répartition de Γ_n.

Pour simplifier, on suppose à partir de maintenant que F est continue. L'objectif de la fin de l'exercice est de montrer qu'avec probabilité un, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers F, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 0 \qquad \text{où} \qquad V_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|.$$

On commence par supposer que $F(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3. Quelle est la loi suivie par les variables X_n ? En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, avec probabilité un, $F_n(x)$ tend vers x quand $n \to \infty$.
4. Montrer que presque sûrement, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers F.
5. Conclure, à l'aide du théorème de Dini, pour le cas où $F(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

On ne fait plus d'hypothèse sur la fonction F (autre que le fait qu'elle est continue). On pose $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$ pour tout $u \in [0, 1]$.

6. Soit U une variable uniforme sur $[0, 1]$. Quelle est la loi de $F^{-1}(U)$?
7. En déduire que V_n a même loi que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n^{\text{unif}}(F(x)) - F(x)|,$$

où F_n^{unif} désigne la fonction F_n dans le cas où les variables X_n sont uniformes sur $[0, 1]$, puis conclure.

Exercice 103. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires uniformes sur $[0, 2\pi[$. Soit $\mathcal{F}_n$ la filtration associée à cette famille. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé tel que $\text{Im}(z) \geq 0$, nous définissons le processus suivant à valeurs dans $\mathbb{C}$ par récurrence :

$$\begin{cases} Z_0 = z \\ Z_{n+1} = Z_n + \text{Im}(Z_n) e^{iU_{n+1}} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases} \tag{3}$$

1. Montrer que le système se réécrit, pour $z = x + iy$, sous la forme

$$X_0 = x \qquad\qquad Y_0 = y$$
$$X_{n+1} = X_n + Y_n \cos(U_{n+1}) \qquad\qquad Y_{n+1} = Y_n(1 + \sin(U_{n+1}))$$

2. Montrer que (Z_n) est une martingale complexe (i.e. montrer que $X_n = \Re(Z_n)$ et $Y_n = \mathrm{Im}(Z_n)$ sont des martingales). Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(Z_n) > 0$ p.s.
3. Montrer que (Y_n) tend vers 0 p.s. La martingale (Y_n) est-elle fermée ?
4. Montrez que $\mathbb{E}(\sqrt{|X_{n+1} - X_n|}) \leq yr^n$ avec un $r < 1$.
5. Soit a tel que $r^2 < a < 1$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup\{|X_{n+1} - X_n| \geq a^n\}) = 0$. Conclure quant à la convergence de X_n vers une variable X_∞.
6. Nous souhaitons calculer la loi de X_∞. Pour cela, nous introduisons $M_n(\lambda) = \exp(i\lambda X_n - |\lambda| Y_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que M_n est une martingale et montrer que $|M_n(\lambda)| \leq 1$ p.s. (On pourra admettre le fait que $\mathbb{E}[\exp(ze^{iU}) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, avec $U \sim \mathrm{Unif}(0, 2\pi)$). En déduire l'expression de $\mathbb{E}(e^{i\lambda X_\infty})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et donner la loi de X_∞.
7. Aurions-nous pu avoir $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$?

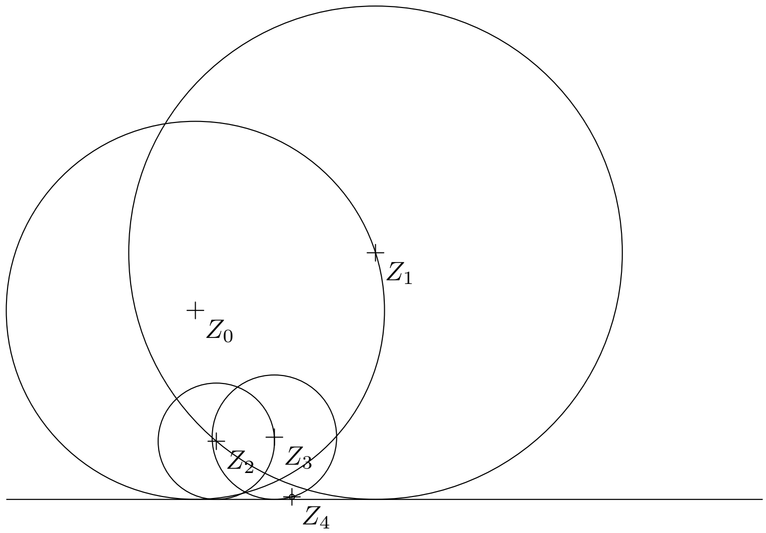

FIGURE 3 – Une trajectoire typique de la martingale de l'Exercice 103.

Exercice 104 (Algorithme de Metropolis)**.** Cet exercice montre comment on peut construire une chaîne de Markov ayant une probabilité stationnaire fixée à l'avance. Soit E un ensemble d'états fini et P une matrice de transition sur E symétrique et irréductible. Soit π une probabilité sur E telle que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On définit sur E une nouvelle matrice de transition Q par

$$Q(x, y) = \begin{cases} \alpha(x, y)P(x, y) & \text{si } x \neq y, \\ 1 - \sum_{z \neq x} Q(x, z) & \text{si } y = x, \end{cases} \qquad \text{où} \quad \alpha(x, y) = \min\left(\frac{\pi(y)}{\pi(x)}, 1\right).$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

1. Montrer que la loi π est réversible pour Q et donc invariante.
2. Montrer que Q est irréductible.
3. On suppose que π n'est pas la distribution uniforme (sinon $Q = P$). On note M l'ensemble des états $x \in E$ tels que $\pi(x) = \max_{y \in E} \pi(y)$.
   (a) Montrer qu'il existe $x_0 \in M$ tel que $P(x_0, y) > 0$ pour un certain $y \notin M$. En déduire que $Q(x_0, z) < P(x_0, z)$ pour un $z \in E$ au moins. Que peut-on dire de $Q(x_0, x_0)$?

(b) Montrer que Q est apériodique (même si P ne l'était pas).

(c) Que peut-on en déduire sur la loi de X_n ?

4. On définit l'algorithme suivant :

Initialisation : donner la valeur de X_1
Pour i *de 1 à* $n-1$
- *simuler* V *selon une loi* $P(X_i, .)$
- *simuler* U *uniforme sur* $[0,1]$ *indépendante de* V
- *si* $U \leq \alpha(X_i, V)$ *alors poser* $X_{i+1} = V$ *sinon poser* $X_{i+1} = X_i$

Montrer que cet algorithme permet de simuler des variables $X_1, \ldots, X_n$ de transition Q.

Remarque : En prenant n grand, cet algorithme est utilisé pour simuler une variable aléatoire de loi π, en particulier lorsque cette probabilité n'est connue qu'à une constante de proportionnalité près.